Linear Algebra

অনার্স ১ম বর্ষ

$\mathbb{R}^n$ ও $\mathbb{C}^n$ এ ভেক্টর

Full Chapter Concept + Math Solution

একটি ক্লাসই যথেষ্ট!

zmathecal school 01824299077 zmathecalschool.com

ভেক্টর স্পেস (R^n এবং C^n) - সংজ্ঞা ও সূত্রাবলী

$\mathbb{R}^n$ **ভেক্টর স্পেস (Real Vector Space):** n-সংখ্যক বাস্তব সংখ্যার (Real numbers) একটি সুবিন্যস্ত ক্রম বা n-tuple-কে $\mathbb{R}^n$ এর একটি ভেক্টর বলা হয়। গাণিতিকভাবে,

$$\mathbb{R}^n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \mid u_i \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbb{C}^n$ **ভেক্টর স্পেস (Complex Vector Space):** n-সংখ্যক জটিল সংখ্যার (Complex numbers) একটি সুবিন্যস্ত ক্রম বা n-tuple-কে $\mathbb{C}^n$ এর একটি ভেক্টর বলা হয়। গাণিতিকভাবে,

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C}\}$$

R^n এবং C^n এ ভেক্টর

সূত্রাবলী (Detailed Formulas)

ধরি, যেকোনো দুটি ভেক্টর $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ এবং $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ এবং c একটি ধ্রুবক বা স্কেলার।

১. ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ: $u \pm v = (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2, \dots, u_n \pm v_n)$

২. স্কেলার গুণন: $cu = (cu_1, cu_2, \dots, cu_n)$

৩. ডট গুণফল বা ইনার প্রোডাক্ট (Dot Product):

*$\mathbb{R}^n$ এর জন্য : $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i\, v_i$

* $\mathbb{C}^n$ এর জন্য : $u \cdot v = u_1 \overline{v}_1 + u_2 \overline{v}_2 + \cdots + u_n \overline{v}_n = \sum_{i=1}^{n} u_i\, \overline{v}_i$

৪. নর্ম বা ভেক্টরের দৈর্ঘ্য (Norm / Length):

*$\mathbb{R}^n$ এর জন্য : $\| u \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$

* $\mathbb{C}^n$ এর জন্য: $\| u \| = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2}$

৫. দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী দূরত্ব (Euclidean Distance):

$d(u, v) = \| u - v \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)^2}$

* $\mathbb{C}^n$ এর জন্য: $d(u, v) = \| u - v \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|^2}$

ভেক্টর স্পেস (R^n এবং C^n) - সংজ্ঞা ও সূত্রাবলী

ধরি, যেকোনো দুটি ভেক্টর $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ এবং $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ এবং c একটি ধ্রুবক বা স্কেলার।

অপারেশন	$\mathbb{R}^n$ (বাস্তব জগত)	$\mathbb{C}^n$ (জটিল জগত)
যোগ ও বিয়োগ	$\mathbf{u} \pm \mathbf{v} = (u_1 \pm v_1, \ldots, u_n \pm v_n)$	$\mathbf{u} \pm \mathbf{v} = (u_1 \pm v_1, \ldots, u_n \pm v_n)$
স্কেলার গুণন	$c\mathbf{u} = (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n)$	$c\mathbf{u} = (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n)$
ডট গুণফল	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i\, v_i$	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i\, \overline{v}_i$
নর্ম (Norm)	$\parallel \mathbf{u} \parallel = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$	$\parallel \mathbf{u} \parallel = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lvert u_i \rvert^2}$
দূরত্ব (Distance)	$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{\sum (u_i - v_i)^2}$	$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{\sum \lvert u_i - v_i \rvert^2}$

প্রশ্ন: ধরি $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ যেখানে $\mathbf{u} = (1,0,-1)$ এবং $\mathbf{v} = (2,-3,1)$, তাহলে (i) $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ (ii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (iii) $\| \mathbf{v} \|$ (iv) $\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|$ (v) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে $\mathbf{u} = (1,0,-1)$ এবং $\mathbf{v} = (2,-3,1)$

(i) $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ নির্ণয়:

$$
\begin{aligned}
2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} &= 2(1,0,-1) + 3(2,-3,1) \\
&= (2 \times 1, 2 \times 0, 2 \times -1) + (3 \times 2, 3 \times -3, 3 \times 1) \\
&= (2,0,-2) + (6,-9,3) \\
&= (2+6, 0-9, -2+3) \\
&= (8,-9,1) \quad \text{(Ans.)}
\end{aligned}
$$

প্রশ্ন: ধরি $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ যেখানে $\mathbf{u} = (1,0,-1)$ এবং $\mathbf{v} = (2,-3,1)$, তাহলে (i) $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ (ii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (iii) $\| \mathbf{v} \|$ (iv) $\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|$ (v) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে $\mathbf{u} = (1,0,-1)$ এবং $\mathbf{v} = (2,-3,1)$

(ii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ নির্ণয়:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (1,0,-1) \cdot (2,-3,1) \\
&= (1 \times 2) + (0 \times -3) + (-1 \times 1) \\
&= 2 + 0 - 1 \\
&= 1 \quad \text{(Ans.)}
\end{aligned}
$$

(iii) $\| \mathbf{v} \|$ নির্ণয়:

$$
\begin{aligned}
\| \mathbf{v} \| &= \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \\
&= \sqrt{4 + 9 + 1} \\
&= \sqrt{14} \quad \text{(Ans.)}
\end{aligned}
$$

প্রশ্ন: ধরি $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ যেখানে $\mathbf{u} = (1,0,-1)$ এবং $\mathbf{v} = (2,-3,1)$, তাহলে (i) $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ (ii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (iii) $\| \mathbf{v} \|$ (iv) $\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|$ (v) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে $\mathbf{u} = (1,0,-1)$ এবং $\mathbf{v} = (2,-3,1)$

(iv) $\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|$ নির্ণয়: প্রথমে $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ ভেক্টরটি নির্ণয় করি:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} - \mathbf{v} &= (1,0,-1) - (2,-3,1) \\ &= (1-2, 0-(-3), -1-1) \\ &= (-1,3,-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| &= \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{1+9+4} \\ &= \sqrt{14} \quad \text{(Ans.)} \end{aligned}$$

(v) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ নির্ণয়:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sqrt{(1-2)^2 + \left(0-(-3)\right)^2 + (-1-1)^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{1+9+4} \\ &= \sqrt{14} \quad \text{(Ans.)} \end{aligned}$$

উদাহরণ-৪

প্রশ্ন: যদি $\mathbf{u} = (1,1,1)$ এবং $\mathbf{v} = (0,1,-2)$ হয়, তবে দেখাও যে $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \| \leq \| \mathbf{u} \| + \| \mathbf{v} \|$ **[NUH-2017]**

সমাধান: দেওয়া আছে, $\mathbf{u} = (1,1,1)$ এবং $\mathbf{v} = (0,1,-2)$

প্রথমে $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ নির্ণয় করি:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1+0, 1+1, 1-2) = (1,2,-1)$$

এখন, $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|$ (নর্ম) বের করি:

$$\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \approx 2.449$$

এবার $\| \mathbf{u} \|$ এবং $\| \mathbf{v} \|$ আলাদাভাবে বের করি:

$$\| \mathbf{u} \| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \approx 1.732$$

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{0+1+4} = \sqrt{5} \approx 2.236$$

এখন তাদের যোগফল:

$$\| \mathbf{u} \| + \| \mathbf{v} \| = \sqrt{3} + \sqrt{5} \approx 1.732 + 2.236 = 3.968$$

যেহেতু, $2.449 < 3.968$ (অর্থাৎ $\sqrt{6} < \sqrt{3} + \sqrt{5}$) সুতরাং, $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \| \leq \| \mathbf{u} \| + \| \mathbf{v} \|$ **(প্রমাণিত)**

ভেক্টর স্পেস (R^n এবং C^n)

উদাহরণ-৪

প্রশ্ন: যদি $\mathbf{u} = (1,1,1)$ এবং $\mathbf{v} = (0,1,-2)$ হয়, তবে দেখাও যে $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \| \leq \| \mathbf{u} \| + \| \mathbf{v} \|$

[NUH-2017]

সমাধান: দেওয়া আছে, $\mathbf{u} = (1,1,1)$ এবং $\mathbf{v} = (0,1,-2)$

প্রথমে $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ নির্ণয় করি:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1 + 0, 1 + 1, 1 - 2) = (1,2,-1)$$

এখন, $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|$ (নর্ম) বের করি:

$$\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6} \approx 2.449$$

এবার $\| \mathbf{u} \|$ এবং $\| \mathbf{v} \|$ আলাদাভাবে বের করি:

$$\| \mathbf{u} \| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3} \approx 1.732$$

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{0 + 1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2.236$$

এখন তাদের যোগফল:

$$\| \mathbf{u} \| + \| \mathbf{v} \| = \sqrt{3} + \sqrt{5} \approx 1.732 + 2.236 = 3.968$$

যেহেতু, $2.449 < 3.968$ (অর্থাৎ $\sqrt{6} < \sqrt{3} + \sqrt{5}$) সুতরাং, $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \| \leq \| \mathbf{u} \| + \| \mathbf{v} \|$

(প্রমাণিত)

ভেক্টর স্পেস (R^n এবং C^n)

উদাহরণ-১০(i) প্রশ্ন: ধরি $\mathbf{u} = (i, 1 - i, i - 3)$ এবং $\mathbf{v} = (2,3 + i, -i)$ তাহলে (i) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (ii) $3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$ (iii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (iv) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (v) $\| \mathbf{u} \|$ এবং (vi) $\| \mathbf{v} \|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\mathbf{u} = (i, 1 - i, i - 3)$ এবং $\mathbf{v} = (2,3 + i, -i)$

(i) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ নির্ণয়: $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (i, 1 - i, i - 3) - (2,3 + i, -i)$

$$= \big(i - 2, 1 - i - (3 + i), i - 3 - (-i)\big)$$

$$= (i - 2, 1 - i - 3 - i, i - 3 + i)$$

$$= (-2 + i, -2 - 2i, -3 + 2i) \quad \text{(Ans.)}$$

(ii) $3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$ নির্ণয়: $3\mathbf{u} + 4\mathbf{v} = 3(i, 1 - i, i - 3) + 4(2,3 + i, -i)$

$$= (3i, 3 - 3i, 3i - 9) + (8,12 + 4i, -4i)$$

$$= (3i + 8, 3 - 3i + 12 + 4i, 3i - 9 - 4i)$$

$$= (8 + 3i, 15 + i, -9 - i) \quad \text{(Ans.)}$$

উদাহরণ-১০(i) প্রশ্ন: ধরি $\mathbf{u} = (i, 1-i, i-3)$ এবং $\mathbf{v} = (2, 3+i, -i)$ তাহলে (i) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (ii) $3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$ (iii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (iv) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (v) $\| \mathbf{u} \|$ এবং (vi) $\| \mathbf{v} \|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\mathbf{u} = (i, 1-i, i-3)$ এবং $\mathbf{v} = (2, 3+i, -i)$

(iii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ নির্ণয়: জটিল জগতের ডট গুণফলের সূত্র অনুযায়ী:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (i, 1-i, i-3) \cdot (2, 3+i, -i)$$
$$= i\left(\overline{2}\right) + (1-i)\left(\overline{3+i}\right) + (i-3)\left(\overline{-i}\right)$$
$$= i(2) + (1-i)(3-i) + (i-3)(i)$$
$$= 2i + \left(3 - i - 3i + i^2\right) + \left(i^2 - 3i\right)$$

$i^2 = -1$ বসিয়ে পাই:

$$= 2i + (3 - 4i - 1) + (-1 - 3i)$$
$$= 2i + 2 - 4i - 1 - 3i$$

$= 1 - 5i$ (Ans.)

উদাহরণ-১০(i) প্রশ্ন: ধরি $\mathbf{u} = (i, 1-i, i-3)$ এবং $\mathbf{v} = (2, 3+i, -i)$ তাহলে (i) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (ii) $3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$ (iii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (iv) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (v) $\| \mathbf{u} \|$ এবং (vi) $\| \mathbf{v} \|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\mathbf{u} = (i, 1-i, i-3)$ এবং $\mathbf{v} = (2, 3+i, -i)$

(iv) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ নির্ণয়:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (2, 3+i, -i) \cdot (i, 1-i, i-3)$$
$$= 2\left(\bar{i}\right) + (3+i)\left(\overline{1-i}\right) + (-i)\left(\overline{i-3}\right)$$
$$= 2(-i) + (3+i)(1+i) + (-i)(-i-3)$$
$$= -2i + \left(3 + 3i + i + i^2\right) + \left(i^2 + 3i\right)$$

$i^2 = -1$ বসিয়ে পাই:

$$= -2i + (3 + 4i - 1) + (-1 + 3i)$$
$$= -2i + 2 + 4i - 1 + 3i$$

$= 1 + 5i$ (Ans.)

ভেক্টর স্পেস (R^n এবং C^n)

উদাহরণ-১০(i) প্রশ্ন: ধরি $\mathbf{u} = (i, 1 - i, i - 3)$ এবং $\mathbf{v} = (2, 3 + i, -i)$ তাহলে (i) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (ii) $3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$ (iii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (iv) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (v) $\| \mathbf{u} \|$ এবং (vi) $\| \mathbf{v} \|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\mathbf{u} = (i, 1 - i, i - 3)$ এবং $\mathbf{v} = (2, 3 + i, -i)$

(v) $\| \mathbf{u} \|$ নির্ণয়: আমরা জানি, $\| \mathbf{u} \| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ প্রথমে $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ নির্ণয় করি:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= i\left(\bar{i}\right) + (1 - i)\left(\overline{1 - i}\right) + (i - 3)\left(\overline{i - 3}\right) \\
&= i(-i) + (1 - i)(1 + i) + (i - 3)(-i - 3) \\
&= -i^2 + \left(1^2 - i^2\right) + \left(-i^2 - 3i + 3i + 9\right)
\end{aligned}$$

$i^2 = -1$ বসিয়ে পাই:

$$\begin{aligned}
&= -(-1) + \left(1 - (-1)\right) + (-(-1) + 9) \\
&= 1 + (1 + 1) + (1 + 9) \\
&= 1 + 2 + 10 = 13
\end{aligned}$$

অতএব, $\| \mathbf{u} \| = \sqrt{13}$ (Ans.)

উদাহরণ-১০(i) প্রশ্ন: ধরি $\mathbf{u} = (i, 1-i, i-3)$ এবং $\mathbf{v} = (2, 3+i, -i)$ তাহলে (i) $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ (ii) $3\mathbf{u}+4\mathbf{v}$ (iii) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ (iv) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ (v) $\|\mathbf{u}\|$ এবং (vi) $\|\mathbf{v}\|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\mathbf{u} = (i, 1-i, i-3)$ এবং $\mathbf{v} = (2, 3+i, -i)$

(vi) $\|\mathbf{v}\|$ নির্ণয়

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$$

প্রথমে $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ নির্ণয় করি:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} &= 2\left(\overline{2}\right) + (3+i)\left(\overline{3+i}\right) + (-i)\left(\overline{-i}\right) \\
&= 2(2) + (3+i)(3-i) + (-i)(i) \\
&= 4 + \left(3^2 - i^2\right) - i^2 \\
&= 4 + \left(9 - (-1)\right) - (-1) \\
&= 4 + (9+1) + 1 \\
&= 4 + 10 + 1 = 15
\end{aligned}$$

অতএব, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{15}$ (Ans.)