CHAPTER—2
GROUP (গ্রুপ)

Definition : A non-empty set G together with a binary operation * is called a group if the following conditions are satisfied :

একটি দ্বিপদী প্রক্রিয়া * সহ একটি অনশূন্য সেট G কে গ্রুপ বলে যদি নিম্নলিখিত শর্তগুলি সিদ্ধ করে:

(i) Closure law : $a * b \in G, \forall a, b \in G$

(i) আবদ্ধতা বিধি : $a * b \in G, \forall a, b \in G$.

(ii) Associative law : $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$

(ii) সংযোজন বিধি: $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$.

(iii) Existence of identity : There exists an element $e \in G$ such that $a * e = e * a = a, \forall a \in G$.

(iii) অভেদকের অস্তিত্ব : একটি উপাদান $e \in G$ এ থাকবে যেন $a * e = e * a = a, \forall a \in G$ হয়।

(iv) Existence of inverse : For any $a \in G$, there exists an element $b \in G$ such that $a * b = b * a = e$

(iv) বিপরীতের অস্তিত্ব : যে কোন $a \in G$ এর জন্য একটি উপাদান $b \in G$ এ থাকবে যেন $a * b = b * a = e$ হয়, যেখানে e হলো G এর অভেদক উপাদান।

where e is the identity element of G. Here a is the inverse of b and b is the inverse of a.

এখানে a হলো b এর বিপরীত উপাদান এবং b হলো a এর বিপরীত উপাদান।

N. B. 1. When the operation * is addition then the group is called an additive group.

2. When the operation * is multiplication then the group is called a multiplicative group.

ABELIAN / COMMUTATIVE GROUP (আবেলীয়/বিনিময়ী গ্রুপ)

[NUMScP-11; NUH-14, 11, 09, 07, 05(Old), 04]

মনে করি, G একটি অনশূন্য সেট এবং ‘o’ একটি বাইনারি অপারেশন, তাহলে (G, o) কে আবেলীয় গ্রুপ বলা হবে যদি এটি নিচের শর্তসমূহ মেনে চলে:

[Let G be a nonempty set and ‘o’ be a binary operation then (G, o) is said to be a group if and only if it satisfies the following conditions:]

(i) Closure law (আবদ্ধতা বিধি) : $a * b \in G, \forall a, b \in G$

(ii) Associative law (সংযোজন বিধি) : $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$

(iii) Existence of identity law (অভেদকের অস্তিত্ব বিধি) : There exists an element $e \in G$ such that $a * e = e * a = a, \forall a \in G$.

(একটি উপাদান $e \in G$ এ থাকবে যেন $a * e = e * a = a, \forall a \in G$ হয়)

(iv) Existence of inverse law (বিপরীতের অস্তিত্ব বিধি) : For any $a \in G$, there exists an element $b \in G$ such that $a * b = b * a = e$

যে কোন $a \in G$ এর জন্য একটি উপাদান $b \in G$ এ থাকবে যেন $a * b = b * a = e$ হয়, যেখানে e হলো G এর অভেদক উপাদান।

v. Commutative law (বিনিময় বিধি): $\forall a, b \in G \Rightarrow a \circ b = b \circ a$

উদাহরণ: $G_1 = \{1, -1\}$ হলে $(G_1, \cdot)$ একটি আবেলীয় গ্রুপ।

উদাহরণ: $G_2 = \{1, -1, i, -i\}$ হলে $(G_2, \cdot)$ একটি আবেলীয় গ্রুপ।

উদাহরণ: $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Z}, +)$ ইত্যাদি একটি আবেলীয় গ্রুপ।

2.1.4 গ্রুপের ক্রম (Order of a Group) *[NUH-14]*

যদি $(G,\circ)$ একটি গ্রুপ হয় তবে G এর উপাদান সংখ্যাকে $(G,\circ)$ গ্রুপের ক্রম বলা হয়। গ্রুপ $(G,\circ)$ এর ক্রমকে $O(G)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

[If $(G, \circ)$ be a group then the number of elements in G is called order of the group $(G, \circ)$. The order of the group $(G, \circ)$ is denoted by $O(G)$.]

উদাহরণঃ $(G, \cdot) = \{1, -1, i, -i\}$ গ্রুপের ক্রম 4 অর্থাৎ $O(G) = 4$।

উদাহরণঃ $(\mathbb{Z}, +) = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ গ্রুপের ক্রম অসীম অর্থাৎ $O(G) = \infty$।

2.1.5 সসীম গ্রুপ (Finite Group)

মনে করি, G একটি গ্রুপ। যদি এটির সসীম সংখ্যক উপাদান থাকে তবে এটিকে সসীম গ্রুপ বলা হয়।

[Let G be a group. If it contains finite number of elements then it is called a finite group.]

উদাহরণঃ $G_1 = \{1, -1\}$ হলে $(G_1, \cdot)$ একটি সসীম গ্রুপ।

উদাহরণঃ $G_2 = \{1, -1, i, -i\}$ হলে $(G_2, \cdot)$ একটি সসীম গ্রুপ।

2.1.6 অসীম গ্রুপ (Infinite Group)

মনে করি, G একটি গ্রুপ। যদি G এর অসীম সংখ্যক উপাদান থাকে তবে তাকে অসীম গ্রুপ বলা হয়।

[Let G be a group. If it contains infinite number of elements then it is called an infinite group.]

উদাহরণঃ $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$ ইত্যাদি এক একটি অসীম গ্রুপ।