$\boxed{২}$ কাই- বর্গ বিন্যাসের পরিঘাত উৎপাদী অপেক্ষক নির্ণয় কর।

অথবা, কাই-বর্গ বিন্যাসের পরিঘাত উৎপাদী অপেক্ষক নির্ণয় করে গড়, ভেদাংক, β_1 ও β_2 বের কর।

অথবা, কাই বর্গ বিন্যাসের β_1 ও β_2 নির্ণয় কর এবং মন্তব্য কর।

উত্তর : আমরা জানি, n স্বাধীনতার মাত্রাবিশিষ্ট কাই-বর্গ বিন্যাসের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক,

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}, \quad 0<\chi^2<\infty$$

সংজ্ঞানুযায়ী কাই বর্গ বিন্যাসের পরিঘাত উৎপাদী অপেক্ষক,

$$M_{\chi^2}(t) = E\left(e^{t\chi^2}\right)$$

$$= \int_0^\infty e^{t\chi^2} f(\chi^2)\, d\chi^2$$

$$= \int_0^\infty e^{tx^2} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2}x^2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2 + tx^2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{2}-t\right)x^2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{1-2t}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} \left[\because \int_0^\infty e^{-\beta x} x^{\alpha-1} dx = \frac{\Gamma\alpha}{\beta^\alpha}\right]$$

$$= \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} (1-2t)^{\frac{n}{2}}}$$

$\therefore M_{x^2}(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$, যা কাই-বর্গ বিন্যাসের

পরিঘাত উৎপাদী অপেক্ষক।

সংজ্ঞানুযায়ী, কাই-বর্গ বিন্যাসের কুমুল্যান্ট উৎপাদী অপেক্ষক,

$$K_{\chi^2}(t) = \log M_{\chi^2}(t)$$

$$= \log (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

$$= -\frac{n}{2} \log (1-2t)$$

$$= \frac{n}{2} \left[2t + \frac{(2t)^2}{2} + \frac{(2t)^3}{3} + \frac{(2t)^4}{4} + \cdots\right]$$

$$= \frac{n}{2} \left[2t + \frac{4t^2}{2} + \frac{8t^3}{3} + \frac{16t^4}{4} + \cdots\right]$$

$$= n\left[t + t^2 + \frac{4t^3}{3} + 2t^4 + \cdots\right]$$

$$= n\left[\frac{t}{1!} + 2\times\frac{t^2}{2!} + \frac{4}{3}\times 3!\times\frac{t^3}{3!} + 2\times 4!\times\frac{t^4}{4!} + \cdots\right]$$

$$\Rightarrow K_{\chi^2}(t) = n\times\frac{t}{1!} + 2n\times\frac{t^2}{2!} + 8n\times\frac{t^3}{3!} + 48n\times\frac{t^4}{4!} + \cdots$$

এখন, $k_r = K_{\chi^2}(t)$ এর বিস্তৃতিতে $\frac{t^r}{r!}$ এর সহগ (যেখানে, $r = 1, 2, 3 \ldots$)

$\therefore k_1 = K_{\chi^2}(t)$ এর বিস্তৃতিতে $\frac{t^1}{1!}$ এর সহগ $= n$

$k_2 = K_{\chi^2}(t)$ এর বিস্তৃতিতে $\frac{t^2}{2!}$ এর সহগ $= 2n$

$k_3 = K_{\chi^2}(t)$ এর বিস্তৃতিতে $\frac{t^3}{3!}$ এর সহগ $= 8n$

$K_4 = K_{\chi^2}(t)$ এর বিস্তৃতিতে $\frac{t^4}{4!}$ এর সহগ $= 48n$

আমরা জানি, গড়, $k_1 = n$

ভেদাংক, $\mu_2 = k_2 = 2n$

$\mu_3 = k_3 = 8n$

$\mu_4 = k_4 + 3k_2^2 = 48n + 3(2n)^2$

$= 48n + 12n^2$

এখন, $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(8n)^2}{(2n)^3} = \frac{64n^2}{8n^3} = \frac{8}{n}$

$\Rightarrow \sqrt{\beta_1} = \sqrt{\frac{8}{n}} > 0$

এবং, $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{48n+12n^2}{(2n)^2} = \frac{48n+12n^2}{4n^2}$

$= \frac{12}{n} + 3$

$= 3 + \frac{12}{n}$

যেহেতু, $\sqrt{\beta_1} > 0$ এবং $\beta_2 > 3$, সুতরাং, কাই- বর্গ বিন্যাস একটি ধনাত্মক বঙ্কিম এবং অতি- সূঁচাল বিন্যাস,

NB ⊛ গামা বিন্যাসের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক,

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\beta^{\alpha} e^{-\beta x} x^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha}, \quad x>0,\ \alpha>0,\ \beta>0$$

⊛ $$\int_0^{\infty} e^{-\beta x} x^{\alpha-1} dx = \frac{\Gamma\alpha}{\beta^{\alpha}}$$

⊛ $$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots\cdots$$

ও χ_n^2 বিন্যাসের কুমুল্যান্ট উৎপাদনকারী অপেক্ষক নির্ণয় কর এবং সেখান থেকে β_1 ও β_2 নির্ণয় করে মন্তব্য কর।

উত্তর: আমরা জানি, কাই-বর্গ বিন্যাসের পরিঘাত উৎপাদী অপেক্ষক

$$M_{\chi^2}(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

সংজ্ঞানুযায়ী, কাই-বর্গ বিন্যাসের কুমুল্যান্ট উৎপাদী অপেক্ষক,

$$K_{\chi^2}(t) = \log M_{\chi^2}(t)$$

$$= \log(1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

$$= -\frac{n}{2}\log(1-2t)$$

$$= \frac{n}{2}\left[2t + \frac{(2t)^2}{2} + \frac{(2t)^3}{3} + \frac{(2t)^4}{4} + \cdots\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[2t + \frac{4t^2}{2} + \frac{8t^3}{3} + \frac{16t^4}{4} + \cdots\right]$$

$$= n\left[t + t^2 + \frac{4t^3}{3} + 2t^4 + \cdots\right]$$

$$= n\left[\frac{t}{1!} + 2\times\frac{t^2}{2!} + \frac{4}{3}\times 3!\times\frac{t^3}{3!} + 2\times 4!\times\frac{t^4}{4!} + \cdots\right]$$

$$\Rightarrow k_{x^2}(t) = n \times \frac{t}{1!} + 2n \times \frac{t^2}{2!} + 8n \times \frac{t^3}{3!} + 48n \times \frac{t^4}{4!} + \cdots$$

এখন, $k_r = k_{x^2}(t)$ এর বিস্তৃতিতে $\frac{t^r}{r!}$ এর সহগ (যেখানে, $r = 1, 2, 3, 4, \cdots$)

$\therefore k_1 = k_{x^2}(t)$ এর বিস্তৃতিতে $\frac{t^1}{1!}$ এর সহগ $= n$

$k_2 = k_{x^2}(t)$ এর বিস্তৃতিতে $\frac{t^2}{2!}$ এর সহগ $= 2n$

$k_3 = k_{x^2}(t)$ এর বিস্তৃতিতে $\frac{t^3}{3!}$ এর সহগ $= 8n$

$k_4 = k_{x^2}(t)$ এর বিস্তৃতিতে $\frac{t^4}{4!}$ এর সহগ $= 48n$

আমরা জানি, গড় $= k_1 = n$

ভেদাংক, $\mu_2 = k_2 = 2n$

$\mu_3 = k_3 = 8n$

$\mu_4 = k_4 + 3k_2^2 = 48n + 3(2n)^2$

$= 48n + 12n^2$

এখন, $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(8n)^2}{(2n)^3} = \frac{64n^2}{8n^3} = \frac{8}{n}$

$\Rightarrow \sqrt{\beta_1} = \sqrt{\frac{8}{n}} > 0$

এবং, $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{48n + 12n^2}{(2n)^2}$

$$= \frac{48n + 12n^2}{4n^2}$$

$$= \frac{12}{n} + 3 = 3 + \frac{12}{n}$$

যেহেতু, $\sqrt{\beta_1} > 0$ এবং $\beta_2 > 3$, সুতরাং, কাই- বর্গ বিন্যাস একটি ধনাত্মক বঙ্কিম এবং অতি - সূঁচাল বিন্যাস

$\boxed{8}$ কাই-বর্গ বিন্যাসের নিয়ামক / নির্দেশক অপেক্ষক নির্ণয় করে গড়, ভেদাংক, β_1 ও β_2 বের কর।

আমরা জানি, n স্বাধীনতার মাত্রাবিশিষ্ট কাই- বর্গ বিন্যাসের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক,

$$f(x^2) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2}x^2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1}, \quad 0 < x^2 < \infty$$

সংজ্ঞানুযায়ী, কাই বর্গ বিন্যাসের নির্দেশক অপেক্ষক,

$$\phi_{x^2}(t) = E\left(e^{itx^2}\right)$$

$$= \int_0^\infty e^{itx^2} f(x^2)\, dx^2$$

$$= \int_0^\infty e^{itx^2} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2}x^2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2 + itx^2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{2} - it\right)x^2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{1-2it}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} \quad \left[\because \int_0^\infty e^{-\beta x} x^{\alpha-1} dx = \frac{\Gamma\alpha}{\beta^\alpha}\right]$$

$$= \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} (1-2it)^{\frac{n}{2}}}$$

$\therefore \phi_{x^2}(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}$, যা কাই-বর্গ বিন্যাসের নির্দেশক অপেক্ষক,

সংজ্ঞানুযায়ী কাই-বর্গ বিন্যাসের কিউমুল্যান্ট উৎপাদী অপেক্ষক

$$K_{x^2}(t) = \log \phi_{x^2}(t)$$

$$= \log (1-2it)^{-\frac{n}{2}}$$

$$= -\frac{n}{2} \log (1-2it)$$

$$= \frac{n}{2}\left[2it + \frac{(2it)^2}{2} + \frac{(2it)^3}{3} + \frac{(2it)^4}{4} + \dots\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[2it + \frac{4(it)^2}{2} + \frac{8(it)^3}{3} + \frac{16(it)^4}{4} + \cdots\right]$$

$$= n\left[it + (it)^2 + \frac{4(it)^3}{3} + 2(it)^4 + \cdots\right]$$

$$= n\left[\frac{it}{1!} + 2\times\frac{(it)^2}{2!} + \frac{4}{3}\times 3!\times\frac{(it)^3}{3!} + 48n\times\frac{(it)^4}{4!} + \cdots\right]$$

এখন, $k_r = k_{x^2}(t)$ এর বিস্তৃতিতে $\frac{(it)^r}{r!}$ এর সহগ

(যেখানে, $r = 1, 2, 3, 4, \cdots$)

$\therefore k_1 = k_{x^2}(t)$ এর বিস্তৃতিতে $\frac{(it)^1}{1!}$ এর সহগ $= n$

$k_2 = k_{x^2}(t)$ এর বিস্তৃতিতে $\frac{(it)^2}{2!}$ এর সহগ $= 2n$

$k_3 = k_{x^2}(t)$ এর বিস্তৃতিতে $\frac{(it)^3}{3!}$ এর সহগ $= 8n$

$k_4 = k_{x^2}(t)$ এর বিস্তৃতিতে $\frac{(it)^4}{4!}$ এর সহগ $= 48n$

আমরা জানি, গড়, $k_1 = n$

ভেদাংক, $\mu_2 = k_2 = 8n$

$\mu_3 = k_3 = 8n$

$\mu_4 = k_4 + 3k_2^2 = 48n + 3(2n)^2 = 48n + 12n^2$

এখন, $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(8n)^2}{(2n)^3} = \frac{64n^2}{8n^3} = \frac{8}{n}$

$\Rightarrow \sqrt{\beta_1} = \sqrt{\frac{8}{n}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}} > 0$

এবং, $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{48n+12n^2}{(2n)^2} = \frac{48n+12n^2}{4n^2}$

$= \frac{12}{n} + 3 = 3 + \frac{12}{n}$

যেহেতু, $\sqrt{\beta_1} > 0$ এবং $\beta_2 > 3$, সুতরাং, কাই-বর্গবিন্যাস একটি ধনাত্মক বঙ্কিম এবং অতি-সূঁচাল বিন্যাস।