

[R] কাই-বর্গ বিন্যাসের পরিঘাত উৎপাদী অপেক্ষক নির্ণয় কর।
 অথবা, কাই-বর্গ বিন্যাসের পরিঘাত উৎপাদী অপেক্ষক নির্ণয় করে
 গড়, ভেদাংক, β_1 ও β_2 বের কর।

অথবা, কাই-বর্গ বিন্যাসের β_1 ও β_2 নির্ণয় কর এবং চম্ভব্য কর।

উত্তর : আমরা জানি, n স্বাধীনতার ছাড়াবিশিষ্ট কাই-বর্গ বিন্যাসের
 সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক,

$$f(x^2) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{1}{2}x^2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1}, \quad 0 < x^2 < \infty$$

অংজ্ঞানুযায়ী কাই-বর্গ বিন্যাসের পরিঘাত উৎপাদী অপেক্ষক,

$$M_{x^2}(t) = E(e^{tx^2}) \\ = \int_0^{\infty} e^{tx^2} f(x^2) dx^2$$

$$= \int_0^{\infty} e^{tx^2} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{1}{2}x^2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2 + tx^2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{2}-t)x^2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{(\frac{1-2t}{2})^{\frac{n}{2}}} \left[\because \int_0^{\infty} e^{-\beta x} x^{\alpha-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha}} \right]$$

$$= \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} (1-2t)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\therefore M_{x^2}(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}, \text{ যা কার্ভ-কর্ড-বিন্যাসের}$$

পরিঘাত উৎপাদী অপেক্ষক বা

$$M_{x^2}(t) = E = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

অংকানুযায়ী, কার্ভ-কর্ম বিস্তারিত ব্রহ্মলোক উৎপাদী অপেক্ষক,

$$K_{X^2}(t) = \log M_{X^2}(t)$$

$$= \log (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

$$= -\frac{n}{2} \log (1-2t)$$

$$= \frac{n}{2} \left[2t + \frac{(2t)^2}{2} + \frac{(2t)^3}{3} + \frac{(2t)^4}{4} + \dots \right]$$

$$= \frac{n}{2} \left[2t + \frac{4t^2}{2} + \frac{8t^3}{3} + \frac{16t^4}{4} + \dots \right]$$

$$= n \left[t + t^2 + \frac{4t^3}{3} + 2t^4 + \dots \right]$$

$$= n \left[\frac{t}{1!} + 2 \times \frac{t^2}{2!} + \frac{4}{3} \times 3! \times \frac{t^3}{3!} + 2 \times 4! \times \frac{t^4}{4!} + \dots \right]$$

$$\Rightarrow K_{X^2}(t) = n \times \frac{t}{1!} + 2n \times \frac{t^2}{2!} + 8n \times \frac{t^3}{3!} +$$

$$48n \times \frac{t^4}{4!} + \dots$$

এখন, $k_r = K_{X^2}(t)$ এর বিকৃতিতে $\frac{t^r}{r!}$ এর সহগ (যেখানে, $r=1,2,3,\dots$)

$$\therefore k_1 = K_{X^2}(t) \text{ এর বিকৃতিতে } \frac{t^1}{1!} \text{ এর সহগ} = n$$

$$k_2 = K_{X^2}(t) \text{ এর বিকৃতিতে } \frac{t^2}{2!} \text{ এর সহগ} = 2n$$

$$k_3 = K_{X^2}(t) \text{ এর বিকৃতিতে } \frac{t^3}{3!} \text{ এর সহগ} = 8n$$

$$K_4 = K_{x^4}(t) \text{ এর বিকৃতিতে } \frac{t^4}{4!} \text{ এর সহগ} = 48n$$

আমরা জানি, গড়, $k_1 = (n-1)$

$$\text{সুতরাং, } \mu_2 = k_2 = 2n$$

$$\mu_3 = k_3 = 8n$$

$$\mu_4 = k_4 + 3k_2 = 48n + 3(2n)^2 = 48n + 12n^2$$

$$\text{এখন, } \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(8n)^2}{(2n)^3} = \frac{64n^2}{8n^3} = \frac{8}{n}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\beta_1} = \sqrt{\frac{8}{n}} > 0$$

$$\text{এক, } \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{48n + 12n^2}{(2n)^2} = \frac{48n + 12n^2}{4n^2}$$

$$= \frac{12}{n} + 3$$

$$\text{সুতরাং, } \beta_2 = 3 + \frac{12}{n}$$

যেহেতু, $\sqrt{\beta_1} > 0$ এবং $\beta_2 > 3$, সুতরাং, কার্ভ-বর্ড

বিন্যাস একটি ধনাত্মক বক্রীয় এবং অতি-মূঢ় বিন্যাস,

[NB] * গামা বিন্যাসের অঙ্কন ঘনত্ব অপেক্ষক,

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha e^{-\beta x} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} x^{\alpha-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

৩. X_n বিন্যাসের বুদ্ধিম্যান্ট উপাদানকারী অপেক্ষক নির্ণয় কর এবং যেখান থেকে β_1 ও β_2 নির্ণয় করে অনুশীলন কর।
উত্তর: আমরা জানি, কাই-বর্গ বিন্যাসের পরিমিত উপাদান অপেক্ষক

$$M_{X^2}(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

অঙ্কনমাত্রী, কাই-বর্গ বিন্যাসের বুদ্ধিম্যান্ট উপাদান অপেক্ষক,

$$K_{X^2}(t) = \log M_{X^2}(t)$$

$$= \log (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

$$= -\frac{n}{2} \log(1-2t)$$

$$= -\frac{n}{2} \left[2t + \frac{(2t)^2}{2} + \frac{(2t)^3}{3} + \frac{(2t)^4}{4} + \dots \right]$$

$$= \frac{n}{2} \left[2t + \frac{4t^2}{2} + \frac{8t^3}{3} + \frac{16t^4}{4} + \dots \right]$$

$$= n \left[t + t^2 + \frac{4t^3}{3} + 2t^4 + \dots \right]$$

$$= n \left[\frac{t}{1!} + 2 \times \frac{t^2}{2!} + \frac{4}{3} \times 3! \times \frac{t^3}{3!} + 2 \times 4! \times \frac{t^4}{4!} + \dots \right]$$

$$\Rightarrow k_{x^2}(t) = n \times \frac{t}{1!} + 2n \times \frac{t^2}{2!} + 8n \times \frac{t^3}{3!} +$$

$$+ 48n \times \frac{t^4}{4!} + \dots$$

এখন, $k_n = k_{x^n}(t)$ এর বিস্তৃতিতে $\frac{t^n}{n!}$ এর সহগ (যেখানে, $n=1,2,3,4,\dots$)

$$\therefore k_1 = k_{x^1}(t) \text{ এর বিস্তৃতিতে } \frac{t^1}{1!} \text{ এর সহগ} = n$$

$$k_2 = k_{x^2}(t) \text{ এর বিস্তৃতিতে } \frac{t^2}{2!} \text{ এর সহগ} = 2n$$

$$k_3 = k_{x^3}(t) \text{ এর বিস্তৃতিতে } \frac{t^3}{3!} \text{ এর সহগ} = 8n$$

$$k_4 = k_{x^4}(t) \text{ এর বিস্তৃতিতে } \frac{t^4}{4!} \text{ এর সহগ} = 48n$$

আমরা জানি, $\mu_1 = k_1 = n$

$$\mu_2 = k_2 = 2n$$

$$\mu_3 = k_3 = 8n$$

$$\mu_4 = k_4 + 3k_2^2 = 48n + 3(2n)^2$$

$$= 48n + 12n^2$$

$$\text{এখন, } \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(8n)^2}{(2n)^3} = \frac{64n^2}{8n^3} = \frac{8}{n}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\beta_1} = \sqrt{\frac{8}{n}} > 0$$

$$\begin{aligned} \text{এবং, } \beta_2 &= \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{48n + 12n^2}{(2n)^2} \\ &= \frac{48n + 12n^2}{4n^2} \\ &= \frac{12}{n} + 3 = 3 + \frac{12}{n} \end{aligned}$$

যেহেতু, $\sqrt{\beta_1} > 0$ এবং $\beta_2 > 3$, সুতরাং, কার্-বর্গ বিন্যাস একটি ধনাত্মক বর্জিত এবং অতি-সূঁচান বিন্যাস।

[৪] কার্-বর্গ বিন্যাসের নিয়ামক/নির্দেশক অপেক্ষক নির্ণয় করে গড়, ছেদাংক, β_1 ও β_2 বের কর।
আমরা জানি, n স্বাধীনতার মাত্রাবিশিষ্ট কার্-বর্গ বিন্যাসের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক,

$$f(x^2) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{1}{2}x^2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1}, \quad 0 < x^2 < \infty$$

অসংজ্ঞানুযায়ী, কার্ বর্গ বিন্যাসের নির্দেশক অপেক্ষক,

$$\Phi_{x^2}(t) = E(e^{itx^2})$$

$$= \int_0^{\infty} e^{itx^2} f(x^2) dx^2$$

$$= \int_0^{\infty} e^{itx^2} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{1}{2}x^2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2 + itx^2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{2} - it)x^2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{1-2it}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} \left[\because \int_0^{\infty} e^{-\beta x} x^{\alpha-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha}} \right]$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} (1-2it)^{\frac{n}{2}}}$$

$\therefore \Phi_{x^2}(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}$ যা কারে-বর্গ বিন্যাসের নির্ভরক
অনুপাতক

অঙ্কানুসারী কারে-বর্গ বিন্যাসের বৃহৎসংখ্যক উৎপাদী অনুপাতক

$$K_{x^2}(t) = \log \Phi_{x^2}(t)$$

$$= \log (1-2it)^{-\frac{n}{2}}$$

$$= -\frac{n}{2} \log (1-2it)$$

$$= \frac{n}{2} \left[2it + \frac{(2it)^2}{2} + \frac{(2it)^3}{3} + \frac{(2it)^4}{4} + \dots \right]$$

$$= \frac{n}{2} \left[2it + \frac{4(it)^2}{2} + \frac{8(it)^3}{3} + \frac{16(it)^4}{4} + \dots \right]$$

$$= n \left[it + (it)^2 + \frac{4(it)^3}{3} + 2(it)^4 + \dots \right]$$

$$= n \left[\frac{it}{1!} + 2 \times \frac{(it)^2}{2!} + \frac{4}{3} \times 3! \times \frac{(it)^3}{3!} + 48n \times \frac{(it)^4}{4!} + \dots \right]$$

এখন, $k_r = k_{x^r}(t)$ এর বিকৃতিতে $\frac{(it)^r}{r!}$ এর সহগ

(যেখানে, $r = 1, 2, 3, 4, \dots$)

$\therefore k_1 = k_{x^1}(t)$ এর বিকৃতিতে $\frac{(it)^1}{1!}$ এর সহগ = n

$k_2 = k_{x^2}(t)$ এর বিকৃতিতে $\frac{(it)^2}{2!}$ এর সহগ = $2n$

$k_3 = k_{x^3}(t)$ এর বিকৃতিতে $\frac{(it)^3}{3!}$ এর সহগ = $8n$

$k_4 = k_{x^4}(t)$ এর বিকৃতিতে $\frac{(it)^4}{4!}$ এর সহগ = $48n$

আমরা জানি, গড়, $k_1 = n$

সুতরাং, $\mu_2 = k_2 = 2n$

$\mu_3 = k_3 = 8n$

$\mu_4 = k_4 + 3k_2^2 = 48n + 3(2n)^2 = 48n + 12n^2$

এখন, $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(8n)^2}{(2n)^3} = \frac{64n^2}{8n^3} = \frac{8}{n}$

$\Rightarrow \sqrt{\beta_1} = \sqrt{\frac{8}{n}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}} > 0$

$$\text{এবং, } \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{48n + 12n^2}{(2n)^2} = \frac{48n + 12n^2}{4n^2}$$

$$= \frac{12}{n} + 3 = 3 + \frac{12}{n}$$

যেহেতু, $\sqrt{\beta_1} > 0$ এবং $\beta_2 > 3$, সুতরাং, কাই-বর্গবিন্যাস
একটি ধনাত্মক বর্ধিত এবং অতি-সুঁড়ল বিন্যাস।